4.К а р т а н Э. Пространства проективной связности// Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.М.;Л.,1937.Вып.4, С.160-173.

5.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.432с.

6.Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.115-120.

7.Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1977.Вып.8.С.135-150.

8.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей//Геометрия.1963.Итоги науки/ВИНИТИ.М.,1965.С.5-64.

9.О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1966. Т.1.С.239-263.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ШЕСТИКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций $\mathcal{K}$ линейчатых квадрик Q с одной невырождающейся шестикратной фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$,где A_0,A_3 совмещаются с фокальными точками квадрики $Q\in\mathcal{K}$, а ребра A_0A_i, A_3A_i – с прямолинейными образующими квадрики $Q\in\mathcal{K}$.Здесь и в дальнейшем $i,\hat{i},k=1,2$; $i\neq\hat{i}$ и по индексам i и $\hat{i}$ суммирование не производится.

Конгруэнция $\mathcal{K}$ определяется следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases}\omega_0^3=0,\ \ \omega_3^0=0,\ \ \omega_i^{\hat{i}}=a_{ik}^{\hat{i}}\omega^k,\ \ \omega_i^3=(\delta_k^{\hat{i}}+c_{ik})\omega^k,\\ \omega_i^0=(b_k^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\omega^k,\ \ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\ \ \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,\\ \Omega\equiv\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=h_k\omega^k,\end{cases}\qquad(1)$$

причем

$$B_1^1\lambda_{12}-\lambda_{11}b_2^1+\lambda_{22}b_1^2-\lambda_{21}b_2^2=0\qquad(2)$$

Для линии $\omega^i=t^i\vartheta$ (где ϑ -параметрическая форма [1 ,с.41]) на фокальной поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{K}$ однозначно определяется присоединенная квадрика Q_t :

$$t^1\mathfrak{F}_1+t^2\mathfrak{F}_2=0,\qquad(3)$$

где

$$\mathfrak{F}_i\equiv h_ix^1x^2-a_{ii}^{\hat{i}}(x^i)^2-a_{\hat{i}i}^{i}(x^{\hat{i}})^2+\lambda_{ki}x^kx^3+c_{ki}x^kx^0.\qquad(4)$$

Уравнения $\mathfrak{F}_i=0$ определяют квадрики Q_i ,которые мы называем ассоциированными квадриками.

О п р е д е л е н и е 1. Линией c_i (соответственно h) на поверхности (A_0) называется линия,для которой точки A_i и A_0 (соответственно A_1 и A_2) полярно сопряжены относительно присоединенной квадрики Q_t ;линией a_i называется линия на поверхности (A_0) ,для которой точка $A_i\in Q_t$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_n$ назовем конгруэнцию $\mathcal{K}$,имеющую одну невырождающуюся поверхность (A_0) кратности не меньше,чем n .Конгруэнцией $\hat{\mathcal{K}}$ назовем конгруэнцию $\mathcal{K}$ квадрик с фокальной парой прямых,пересекающихся в точке A_0 .

В силу свойств конгруэнций квадрик в P_3 имеем следующую классификационную схему:

$$\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}_2\longrightarrow\mathcal{K}_3\longrightarrow\mathcal{K}_4\longrightarrow\mathcal{K}_5\longrightarrow\mathcal{K}_6\longrightarrow\mathcal{K}_7-\cdots\rightarrow\hat{\mathcal{K}}.$$

Подклассы $\mathcal{K}_2,\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_4$ исследованы достаточно подробно в работах [2],[3].Одним из наиболее замечательных подклассов конгруэнций $\mathcal{K}$ являются конгруэнции $\mathcal{N}\in\mathcal{K}_4$ -конгруэнции $\mathcal{K}$ с неопределенными линиями c_1 и c_2.

Конгруэнции $\mathcal{N}$ определяются системой пфаффовых уравнений

$$\begin{cases}\omega_0^3=0,\ \ \omega_3^0=0,\ \ \omega_i^{\hat{i}}=a_{ik}^{\hat{i}}\omega^k,\ \ \omega_i^3=\omega^{\hat{i}},\\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\ \ \Omega\equiv\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=h_k\omega^k,\\ \omega_i^0=(b_i^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\omega^k,\ \ \ \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0\end{cases}\qquad(5)$$

и конечными соотношениями

$$\begin{cases}\lambda_{12}b_1^1-\lambda_{11}b_2^1+\lambda_{22}b_1^2-\lambda_{21}b_2^2=0,\\ 2a_{i\hat{i}}^{\hat{i}}+h_i=0.\end{cases}\qquad(6)$$

Конгруэнции $\mathcal{N}$ обладают следующими характеристическими признаками (см.[3]):

I)Обе ассоциированные квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с вершиной A_0;

2)Точка A_0 является фокальной точкой второго порядка.

Квадрика Ли поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}$ пересекается с квадрикой Q по асимптотическим касательным A_0A_i и конике:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0 \ , \quad h_k x^k + m x^3 = 0 . \tag{7}$$

Таким образом,с конгруэнцией $\mathcal{N}$ ассоциируется конгруэнция коник,лежащих на квадрике Q .

О п р е д е л е н и е 3.Конгруэнцией $\mathcal{N}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{N}$,у которой линии h, a_1, a_2 совпадают,а точки A_1 и A_2 не сопряжены полярно относительно обеих ассоциированных квадрик Q_1 и Q_2 .

В силу этого определения конгруэнции $\mathcal{N}_0$ выделяются из конгруэнций $\mathcal{N}$ соотношениями:

$$a = 0 \ , \ s_1 = 0 \ , \ s_2 = 0, \tag{8}$$

$$h_1 h_2 \neq 0 \ , \tag{9}$$

где относительные инварианты a, s_1, s_2 определяются формулами (3) работы [3].

С учетом (9) осуществим фиксацию оставшихся двух вторичных групповых параметров,положив: h_1=I ,h_2=I. Пфаффова система уравнений конгруэнции $\mathcal{N}_0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0 \ , \ \omega_3^0 = 0 \ , \ 2\,\omega_i^{\hat{i}} = -\omega^i - \omega^{\hat{i}}, \ \ \omega_i^3 = \omega^{\hat{i}}, \\ \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \ \ \omega_i^0 = (b_k^{\hat{i}} + \lambda_{ik})\,\omega^k, \\ 2\omega_0^0 = (H_{11} + H_{21} - \frac{1}{2})\,\omega^1 + (H_{12} + H_{22} - \frac{1}{2})\,\omega^2, \\ 2\,\omega_3^3 = (\frac{3}{2} - H_{11} - H_{21})\,\omega^1 + (\frac{3}{2} - H_{12} - H_{22})\,\omega^2, \\ 2\,\omega_i^i = (H_{\hat{i}i} - H_{ii} - \frac{1}{2})\,\omega^i + (H_{\hat{i}\hat{i}} - H_{i\hat{i}} - \frac{1}{2})\,\omega^{\hat{i}}, \end{cases} \tag{IO}$$

где величины H_{ik} находятся из дифференциальных уравнений для компонент геометрического объекта h_i .Из (IO) следуют конечные соотношения:

$$\begin{cases} b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} + b_1^2 \lambda_{22} - b_2^1 \lambda_{11} = 0, \\ H_{i\hat{i}} = \lambda_{ii} + \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}) \ , \ \ \lambda_{11} - \lambda_{22} + 2\,(\lambda_{12} - \lambda_{21}) = 0 . \end{cases} \tag{II}$$

Анализируя систему (IO),(II),убеждаемся,что конгруэнции $\mathcal{N}_0$ определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Для конгруэнций $\mathcal{N}_0$ справедливы конечные соотношения (2) работы [3] и соотношения:

$$-\lambda c + (u_i - a)^2 + 2 v_{\hat{i}} q_{\hat{i}} + (s_i + t_i)(t_{\hat{i}} - s_{\hat{i}}) - (v_i + w_i)(r_{\hat{i}} + q_{\hat{i}}) - p_i \ell_i = 0,$$

$$\lambda (r_{\hat{i}} + q_{\hat{i}}) + 2 v_{\hat{i}}\,(u_i - a) + \ell_i\,(s_{\hat{i}} - t_{\hat{i}}) + (v_i + w_i)\,(s_i + t_i) = 0 .$$

Следовательно,фокальная точка A_0 квадрики $Q \in \mathcal{N}_0$ -шестикратная. Таким образом, $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_6$. Можно показать,что конгруэнция $\mathcal{N}_0$ не является конгруэнцией $\mathcal{K}_7$.

Уравнение квадрики Ли Q_0 фокальной поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}_0$ записывается в виде

$$\Phi_0 \equiv 4\,(x^1x^2 - x^0x^3) + 2\,x^1x^2 + 2\,x^2x^3 + (2\,\lambda_{12} + H_{12})\,(x^3)^2 = 0.$$

Плоскость коники (7) проходит через точку A_0 и точку $E_0^* = A_1 - A_2$ - четвертую гармоническую единичной точке $E_0 = A_1 + A_2$ относительно A_1 и A_2 .

Библиографический список

I.Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,I97I.Т.3.С.29-48.

2.М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,I98I.Вып.I2. С.44-47.

3.Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,I986.Вып.I7.С.I06-I09.

УДК 5I4.75

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к
(Калининградский ун-т)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции коник F ,лежащих на инвариантной цилиндрической поверхности Φ .Назовем такие конгруэнции цилиндрическими конгруэнциями коник.

Исследования проводятся в частично-канонизированном репере